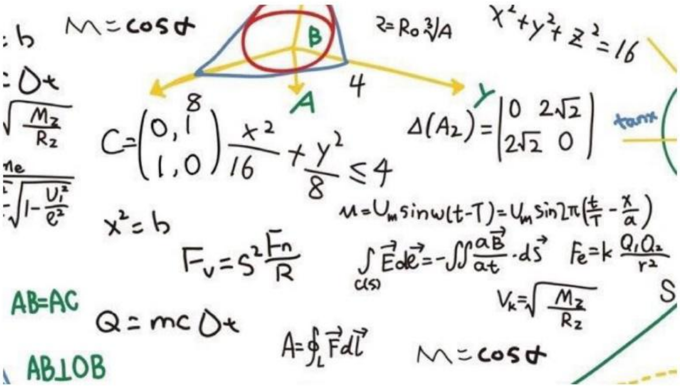
2019年第一学期版

高数

期中小助手



仲英学业辅导中心出品

学辅公众号　　学粉群 5.1

工科数学分析基础（上）小助手

编写人员：（根据编写章节顺序排名）自动化81夏诗淇、自动化84岳浩、电气84韩健乐、电气812王锴、机类805仇文昭、电气86刘菁锐、电气812赵国庆、自动化81潘林波

排版人员：能动B71杨松

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者的努力工作，使本资料可以按时完工。由于编者们的能力与精力限制，以及本资料是仲英学业辅导中心首次采用LaTeX排版，难免有错误之处。如果同学们在本资料中发现错误，请联系仲英学业辅导中心：**XJTUzyxuefu@163.com**，我们将在修订时予以更正。

从第3周开始，**每晚19:00-21:00**，学辅志愿者在东21舍118学辅办公室值班，当面为学弟学妹们答疑。

同时，我们也有线上答疑平台——学粉群。

18级学粉群：646636875，928740856；

19级学粉群：902493560，756433480。

期中考试与期末考试前，我们还会举办考前讲座。学辅还有新生专业交流会，转专业交流会，英语考试讲座等活动，消息会在学粉群和公众号上公布，欢迎同学们参与。

仲英书院学业辅导中心

2019年9月23日

content

一、函数、极限、连续

1.1 函数

1.1.1 函数相关性质

函数四大基本性质：单调性、奇偶性、有界性、周期性. 要特别留意函数的奇偶性，特别是在积分运算中，善于利用奇偶性有时可以极大简化运算.

1.1.2 分段函数、取整函数、Dirichlet 函数（整标函数）

1) 分段函数是一个函数，只是在不同定义域内有不同表达式；

2) 取整函数重要性质：$x-1<[x]\le x<[x]+1$；

3)Dirichlet 函数常用来作为反例来说明某些命题的错误.

1.1.3 典型例题

[例 1.1] 设 $f(0)=0$ 且 $x\neq 0$ 时，$af(x)+bf(1/x)=c/x$，其中 a,b,c 为常数，且 $|a|=|b|$，证明 $f(x)$ 为奇函数.

分析：证明 $f(x)$ 为奇函数，关键是求出其表达式. 令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t}$，代入原式子得到新的表达式，与原式子联立，消去$f(\frac{1}{x})$，即可得到 $f(x)$ 表达式，结合题目条件 $f(0)=0$ 即可判断.

证明过程如分析，求得$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}(bx-\frac{c}{x})$，显然 $f(x)=-f(-x)$，又因为 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 为奇函数.

1.2 数列极限

1.2.1 数列极限的计算

1) 数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义. ⋆

a) 放大法：有 $|a_n-A|<\varepsilon$ 很难解出 n，此时可将 $|a_n-A|$ 放大，使之成为 n 的一个新函数（记为 H_n），即 $|a_n-A|<H_n$，进而由 $H_n<\varepsilon$ 可解出 $n>N(\varepsilon)$.

b) 分步法：有时 $|a_n - A|$ 特别复杂，只有在 n 大于某个数 N_1 可以放大成 H_n，此时解出 $n > N(\varepsilon)$，取 $N=\max\{N_1,N(\varepsilon)\}$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n - A|<\varepsilon$.

2) 收敛数列的性质

夹逼准则 ★★★ ：求数列极限的重要方法.

3) 数列收敛判别准则

单调有界原理 ★★

数列敛散性判定准则和数列极限的计算紧密相关，在某些证明题中往往是一起使用.

4) 定积分求数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$$

其中$\frac{(i-1)(b-a)}{n}\leq\xi_i\leq\frac{i(b-a)}{n},(i=1,2,3,...,n)$

通常情况下都是转化为函数在区间 [0,1] 的定积分.

5) 常用公式直接求和化简

1.2.2 典型例题

[例 1.2] 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>1)$

解法 1：$\forall\varepsilon>0$ 使得：

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$$

只要 $\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$，即 $\frac{1}{n}\lg a<\lg(1+\varepsilon)$ 取 $N=\left[\frac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\right]$，则当 $n>N$ 时，$\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$ 成立，原极限得证. $0<h_n<\frac{a}{n}$，

解法 2: 令 $\sqrt[n]{a}-1=h_n$，则 $h_n>0$，而且 $a=(1+h_n)^n=1+nh_n+...+(h_n)^n>nh_n$，$0<h_n<\frac{a}{n}$，$|\sqrt[n]{a}-1|<\frac{a}{n}<\varepsilon$，只要 $\frac{a}{n}<\varepsilon$，现在取 $N=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$，这样即可满足极限定义.

注: 放大要根据研究式子灵活选择，如果遇到 $sin\ (n)$，$cos\ (n)$ 之类的三角函数式子，常取绝对值放大为1；遇到 $\sqrt[n]{n}$ 类似式子，还可以考虑令 $\sqrt[n]{n}=1+x_n$，得到 $n=(1+x_n)^n$，从而利用二项式展开进行放大或者伯努利不等式放缩. 总而言之，这一部分的证明技巧性较高，需要多积累开拓思路. 但这部分在考试中涉及较少！

[例 1.3] 设 $x_0>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{1}{{x_n}^2})$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限.

解：由 $x_0>0$ 可知，$x_n>0$. 利用三次均值不等式：

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n+x_n+\frac{1}{{x_n}^2})\geq 1$$

从而：

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}(\frac{1}{{x_n}^2}-x_n)<0$$

数列 x_n 单调递减且有下界. 由单调有界准则可知，数列极限存在.

求极限时，令$x = \frac{1}{3}(2x + \frac{1}{x^2})$，解得 $x = 1$，故： $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

[例 1.4] 设序列 $\{a_n\}$ 满足$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, n = 1, 2, \ldots$证明序列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限.

分析：不妨计算序列的前几项不难发现 $a_1 < a_3 < a_5 < a_4 < a_2$，由此推测序列的奇数下标项单调递增，偶数下标项单调递减，这实则是序列存在极限的一种特殊情况：奇偶项一增一减最后趋向于同一常数.

解：由递推式可以求得：

$$a_{n+2} = 2 - \frac{1}{a_n + 1}$$

进而有：

$$a_{n+2} - a_n = (2 - \frac{1}{a_n + 1}) - (2 - \frac{1}{a_{n-2} + 1}) = \frac{a_n - a_{n-2}}{(a_{n-2} + 1)(a_n + 1)}$$

从这个递推式可以看出 $a_{n+2} - a_n$ 与 $a_n - a_{n-2}$ 同号. 再根据 $a_1 < a_3$，$a_4 < a_2$ 可以看出序列的奇数下标项单调递增，偶数下标项单调递减，此外由递推式还可以得出通项介于 1 与 2 之间.

由单调收敛准则可知奇数项、偶数项序列分别收敛，现设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = b$，则有：

$$a = 2 - \frac{1}{a+1}, b = 2 - \frac{1}{b+1}$$

从而得到奇偶序列极限相等即 $a = b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 此即为序列的极限.

注：判断数列单调性时，常作差判断 $x_{n+1} - x_n$ 与 0 的大小或者作商判断 x_{n+1}/x_n 与 1 的大小，也可利用递推关系式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 中函数 $f(x)$ 的单调性，在过程中可能会用到不等式放缩，导数等相关知识. 证明有界性时常利用数学归纳法，也可利用放缩法. 对于某些没有给出明确递推关系的，应先建立递推关系，再证明求解. 有时候求出多个极限值，常根据极限的保号性进行取舍.

[例 1.5] 求极限$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$

分析：此题为无限项的累加求和极限问题，考虑到 n 是正整数可以求出和式的项数，根据最大项和最小项使用夹逼准则.

解：项数为 $(n+1)^2 - n^2 + 1 = 2n + 2$

$$\frac{2n+2}{\sqrt{(n+1)^2}} \leqslant \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2n+2}{\sqrt{n^2}}$$

而：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{\sqrt{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{\sqrt{n^2}}=2$$

由夹逼准则得：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$$

[例 1.6] 求极限$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$

解：原极限可化为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{1^2+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1^2+(\frac{2}{n})^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{1^2+(\frac{n}{n})^2}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{i^2}{n^2})}}$$

易知，此式子是区间 $[0,1]$，函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 的定积分，而

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln(x+\sqrt{1+x})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$$

所以原极限的值为 $\ln(1+\sqrt{2})$

注：在区间 [0,1] 上积分求极限是一种较常见的方法，需引起注意.

(1) 解：记原极限表达式为 A_n，则由通项易知：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<A_n<\frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$$

[例 1.7]

(1) 求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+...+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{n}{n}})$

(2) 设 $x_n=\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)}/n$，求 $\lim_{n\to\infty}x_n$

分析：对于累加求和的式子求极限，常采用夹逼准则，且可能会使用定积分计算和式. 对于 n 项乘积的式子求极限，常取对数将 n 项乘积化为 n 项求和，然后利用再利用夹逼准则、定积分定义等求解.

现对$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}$进行求和：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}=\frac{n}{n+1}(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{i\pi}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{i\pi}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\int_0^1\sin\pi x dx=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$$

同理可以求得右边和式值亦为 $\frac{2}{\pi}$，故原极限为 $\frac{2}{\pi}$.

(2) 采用 e^{ln} 的方法：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}e^{(\frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+...+\ln(n+n)}{n}-\ln n)}$$

而：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+...+\ln(n+n)}{n}-\ln n\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+...+\ln(n+n)-n\ln n}{n}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+...+\ln(1+\frac{n}{n}))\\=&\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1\end{aligned}$$

故原极限为：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$$

注：夹逼准则是求无穷和极限的重要方法，最主要的是找出夹的两侧的值，一般情况下最大值最小值对应数列的首项或者末项，但有时候存在另外的技巧，可能与积分的定义相结合，要视具体情况而定.

[例 1.8] 求极限$\lim_{n\to\infty}[1+\sin(\pi\sqrt{1+4n^2})]^n$

分析：对于指数幂形式，可以考虑 e^{ln} 大法将幂指数和底数化成多项式进行研究，其次对于此题还应注意由正弦函数想到了什么？其一为重要极限的替换，其二为正弦函数的周期性.

解：原极限等价于以下极限：

$$\lim_{n\to\infty}e^{n\ln(1+\sin(\pi\sqrt{1+4n^2}))}$$

而根据正弦函数的周期性及等价无穷小可得：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1+\sin(\pi\sqrt{1+4n^2}))} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1+\sin(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi))} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\sin(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi)}, (x\to 0, \ln(x+1)\sim x) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\sin(\pi\frac{1}{\sqrt{1+4n^2}+2n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\pi\frac{1}{\sqrt{1+4n^2}+2n}} = e^{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

1.3 函数极限与无穷大无穷小量

1.3.1 函数极限计算方法 ⋆⋆⋆:

1) 函数极限的 $\varepsilon - N$ 定义 $\star$

2) 函数极限的性质

a) 夹逼原理

b) 有理运算法则

3) 两个重要极限

4) 无穷小的等价代换 $\star\star\star$

等价无穷小可以计算 $\frac{0}{0}$ 型极限，用的时候往往是在若干因子乘积时使用，若干因子加减时不可盲目进行等价无穷小替换!!

5) 洛必达法则 $\star\star\star$

所求极限的未定式类型共有 7 种：$\frac{0}{0}$ 型、$\frac{\infty}{\infty}$ 型、$0\cdot\infty$ 型、$\infty-\infty$ 型、1^∞ 型、0^0 型和 ∞^0 型，最终都要化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型来计算. 要首先注意判定题目属于哪种未定式，洛必达法则往往和等价无穷小、恒等变形结合来计算极限.

6) 利用泰勒展开式 $\star$

7) 利用微分中值定理 $\star$

1.3.2 典型例题

[例 1.9]

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1})$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})$

解：(1) 令 $t=x-\pi$, 则 $x=t+\pi$，当 $x\to\pi$ 时，$t\to0$. 原极限为：

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin(mt+m\pi)}{\sin(nt+n\pi)}=(-1)^{m-n}\lim_{t\to0}\frac{\sin mt}{\sin nt}=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$$

(2) 利用和差化积公式化简得到：

$$\sin\ln(x+1)-\sin\ln x=2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}$$

又因为 $x\to+\infty$，$ln\ (x+1)-lnx=ln\ (1+1/x)\to0$，所以：

$$\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}=0$$

且 $\left|\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\right|\le1$ 有界，故原极限为 0.

注：亦可用中值定理，$\sin\ln(x+1)-\sin\ln x=\cos\varepsilon[\ln(x+1)-\ln x]=0$

(2) 利用反三角公式 $arctanx-arctany=arctan[(x-y)/(1+xy)]$，原极限可化简为：

$$\lim_{x\to\infty}x(\arctan1-\arctan\frac{x}{x+1})=\lim_{x\to\infty}x\arctan\frac{1}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}x\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{2}$$

(3) 利用反三角公式 $arctanx-arctany=arctan[(x-y)/(1+xy)]$，原极限可化简为：

$$\lim_{x\to+\infty}x(\arctan1-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})=\lim_{x\to+\infty}x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\frac{\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}}=e^2$$

注：两个重要极限在极限计算中出现频率较高，但往往需要和恒等变形技巧、等价

(4) 利用反三角公式 $\arctan x-\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$，原极限可化简为：

无穷小结合使用，使得计算更简便，另外还需要了解一些常用的三角函数公式，如和差化积、积化和差公式以及必要的反三角函数公式（但考试不做要求）.

[例 1.10]

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{\sin x})\ln(2+\cos x)}{(\sqrt{1+4x^2}-1)\ln(1+3x)}$

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$

分析：利用等价无穷小，结合恒等变形.

解：(1) 原极限可化简为：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

(2) 利用 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$\ln(1+\alpha x)\sim\alpha x$ 将原极限化简为：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)\ln 3}{\frac{1}{2}4x^2 3x}=\frac{\ln 3}{36}$$

（最后一步利用等价无穷小代换或洛必达法则）

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{-x}\sin^2 x+1)+\ln e^x-x}{\ln(e^{-2x}x^2+1)+\ln e^{2x}-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}\sin^2 x}{e^{-2x}x^2}=1$

注：等价无穷小是求极限的重要手段，首先要熟悉常见的等价无穷小，通过变形构造进行等价无穷小替换求极限.

[例 1.11]

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

解：(1) 根据洛必达法则，原极限可化简为：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

(2) 通分后利用等价无穷小和洛必达法则即可，化简如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{\sin^2 x\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(4x^2\right)}{6x^2}=\frac{4}{3}$$

(3) 通过取对数将原极限化为 $\infty-\infty$ 型，然后利用洛必达和等价无穷小.

$$y=\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\frac{1-\ln x}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}\frac{1-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1$$

故原极限 $y=e_{-}^{1}$

注：洛必达使用过程中一定要先判断极限式是否符合两种未定式类型. 要灵活运用等价无穷小化简极限式，并且及时分离出极限存在的式子. 有时候较难的题目会设置陷阱，看似符合两种未定式的形式，但使用洛必达法则却会出现越来越复杂以至于无法求解的情况，如$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$，此时应使用换元法，令 $t=1/x^2$.

[例 1.12] (1)$\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\cos x-\frac{1}{2}x^2\right)\left(e^x-1-x\right)}{x^3(\arcsin x-x)}$

(2)$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{x^2}\right)\sin x^2}$

(3)$\lim_{x\to0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$

分析：合理利用泰勒展开式.

解：(1) 将 $\cos x$ 和 e^x 展开并结合等价无穷小代换可以将原极限化简为：

$$\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{24}\frac{x^2}{2}}{x^3\frac{x^3}{6}}=-\frac{1}{8}$$

(2) 将 $\sqrt{1+x^2}$、$cosx$、e^{x^2} 展开，并利用等价无穷小代换可将原极限化简为：

（3）同样利用泰勒展开和等价无穷小代换：

$$\tan\tan x=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+o(\tan^3 x)=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\sin\sin x=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

故，原极限的值为：

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=2$$

注：泰勒公式求极限时展开项数是关键，展开项数少可能导致计算错误，展开多会带来不必要的计算量，但一般题目展开不会超过 3 项. 特别地，展开一阶或者两阶其实就是常用的等价无穷小. 某些常用的泰勒展开最好能够记住.

[例 1.13]

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2xe^{x^2})-\sin(x^2e^{-x})}{\tan(\sin 2x)-\tan(\sin x)}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^4\left(\text{arccot}\frac{2x^2+5}{x^2+1}-\text{arccot}\frac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$

分析：对于此类极限式，可以考虑使用拉格朗日中值定理.

解：(1) 根据拉格朗日中值定理，可将原极限化简为：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\xi(2xe^{x^2}-x^2e^{-x})}{\sec^2\eta(\sin 2x-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-x^2e^{-x}}{\sin 2x-\sin x}=2$$

(2) 根据拉格朗日中值定理，可将原极限化简为：

$$\lim_{x\to\infty}-\frac{x^4}{1+\zeta^2}\left(\frac{2x^2+5}{x^2+1}-\frac{2x^2+7}{x^2+2}\right)=\lim_{x\to\infty}-\frac{x^4}{1+\zeta^2}\frac{3}{(x^2+1)(x^2+2)}=-\frac{3}{5}$$

[例 1.14]

(1) 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x^2}{1+x}-ax-b\right)=0$，求 a 和 b.

(2) 设函数 $f(x) = x + a\ln(1 + x) + b\sin x$，$g(x) = kx^3$，若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是当 $x\to 0$ 时的等价无穷小，求 a，b，k 的值.

解：(1) 分析一：若分子次数高于分母，极限不存在 $(x\to 0)$.

解法一：

$$\frac{2-x^2}{1+x}-ax=\frac{-(a+1)x^2-ax+2}{1+x}\to b$$

$$\Rightarrow a+1=0,a=-1;b=1$$

分析二：无穷大与任何非零常数的乘积一定是无穷大，故由极限存在知原式应为无穷大与无穷小相乘.

解法二：

$$\left(\frac{2-x^2}{1+x}-ax-b=x\left(\frac{2-x^2}{x+x^2}-a-\frac{b}{x}\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{2-x^2}{x+x^2}-a-\frac{b}{x}\to 0$$

即：

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{1+x}-\frac{b}{x}=-1;b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x^2}{1+x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+x}{1+x}=1$$

(2) 分析：由于 $g(x)$ 为 3 阶无穷小，所以 $\ln(1+x)$ 和 $\sin x$ 泰勒展开时，均需要展开到 x^3 项，即：

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

代入 $f(x)$ 并化简，

$$f(x)=(1+a+b)x-\frac{1}{2}ax^2+\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{6}b\right)x^3+o(x^3)$$

由于 $f(x)\sim g(x)$，所以 $f(x)$ 中的一次项和二次项系数为 0，故：

$$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ -\frac{1}{2}a=0 \\ \frac{1}{3}a-\frac{1}{6}b=k \end{cases} \Rightarrow a=0,b=-1,k=\frac{1}{6}$$

1.4 连续性以及间断点的类型

1.4.1 相关概念

1) 连续和间断的概念间断点的分类 ⋆⋆⋆

2) 初等函数的连续性 ⋆⋆⋆

3) 闭区间上连续函数的性质 ⋆⋆⋆

相关性质往往和之后学的微分中值定理一起用于一些证明题，需要技巧，较有难度，一般作为压轴题.

1.4.2 典型例题

[例 1.15] 求函数$f(x)=\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$的间断点，并判断其类型.

分析：考虑间断点及其类型时，先考虑定义域，找出无定义的点，再看两端极限，最后看极限值与定⋆⋆义值是否相等.

解：设 $n=0,\pm1,\pm2,...$ 由定义可知 $f(x)$ 在每个区间 $(n,n+1)$ 内连续. 又

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to0}\frac{x(1-x^2)}{\pi x}=\frac{1}{\pi}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos(\pi x)}=\frac{2}{\pi}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$$

$$\lim_{x\to n}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\infty(n=\pm2,\pm3,...)$$

故 $x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，$x_n=n(n=\pm2,\pm3......)$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

注：判断间断点类型题目较为基础，几乎必考，但不注意也容易丢分.

[例 1.16] 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数，试确定 a 和 b 的值.

分析：首先应根据所给极限表达式求出函数的表达式，再根据特殊点左右极限进行求解解：原函数可化简为：

$$\begin{cases} \frac{1}{x}, x<-1 \\ \frac{a-b-1}{2}, x=-1 \\ ax^2+bx, -1<x<1 \\ \frac{a+b+1}{2}, x=1 \\ \frac{1}{x}, x>1 \end{cases}$$

利用 -1，1 的左右极限得到 $(a-b-1)/2=-1$，$(a+b+1)/2=1$，解得 $a=0$, $b=1$.

注：与函数连续性有关的求参数的题型也较为重要，本质上还是考察极限运算，以及极限存在的定义.

[例 1.17] 设 $f(x)$为连续函数，且 $0\le f(x)\le 1$，证明在[0,1]上方程$2x-\int_0^x f(t)dt=1$有唯一实根.

分析：首先利用零点存在定理证明根的存在性，然后利用单调性证明根的唯一性.

证明：首先证明根的存在性：设函数$F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$.

由于 $F(0)=-1<0$，$F(1)=2-\int_0^1 f(t)dt>1-\int_0^1 dt=0$

若 $f(x)=1$，则 $F(x)=0$ 零点为 1；若 $f(x)<1$，则 $F(1)>0$，由零点存在定理，存在 $c\in(0,1)$, 使得 $F(c)=0$. 由此可知在区间 [0,1] 上存在根.

之后证明根的唯一性：

由于 $F'(x)=2-f(x)\ge 1>0$，故 $F(x)$ 在 [0,1] 单调递增. 综上，$F(x)$ 在 [0,1] 上有唯一实根，原命题得证.

[例 1.18] 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$. 试证明存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

分析：利用闭区间连续函数的介值定理.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $\exists m,M$ 使得 $m\le f(x)\le M$

而在 $[a,b]$ 上，$g(x)>0$. 有 $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$，两边同时积分有

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

因此有：

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$$

由闭区间上连续函数的介值定理可知，存在一点 $\xi \in [a , b]$，使得原等式成立，得证.

[例 1.19] 设 $f(x)$ 在 $[0,n]$（n 为自然数，$n > 1$）上连续，$f(0) = f(n)$，证明存在 $\varepsilon , \varepsilon + 1 \in [0,n]$，使得 $f(\varepsilon) = f(\varepsilon + 1)$.

证明：设 $g(x) = f(x+1) - f(x)$，即证明 $g(x)$ 在 $[0, n-1]$ 上存在零点

$$g(0) = f(1) - f(0), g(1) = f(2) - f(1), ...g(n-1) = f(n) - f(n-1)$$

将以上 n 个等式相加，得到：$\sum\limits_{i=0}^{n-1} g(i) = f(n) - f(0) = 0$

设 $g(x)$ 在 $[0, n-1]$ 上的最大值是 M，最小值是 m，则有：

$$nm \le \sum_{i=0}^{n-1} g(i) \le nM, m \le \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} g(i)}{n} \le M$$

由于函数连续，则存在 $\varepsilon \in (0, n-1)$ 使得 $g(\varepsilon) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} g(i)}{n} = 0$，即 $f(\varepsilon) = f(\varepsilon + 1)$.

注：与闭区间上连续函数性质有关的证明题往往技巧性较高，容易和后面学到的罗尔定理，微分中值定理结合来考察，需要假设函数在闭区间上的极值，有时还需要用到极值点一阶导为 0 的性质，在考试中也属于拉开差距的题目.

二、一元函数微分学及其应用

2.1 导数的概念

第一小节的主要考试重点为通过导数的的极限定义式证明一些特殊的函数在特定点的函数是否连续，导数是否存在，应熟练掌握导数可导的定义概念及表达式.

2.1.1 导数定义应用

题型一：★★★ 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导 $f(x)$ 在 x_0 处左，右导数存在且相等

[例 2.1] 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 点 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

$(A)\ \lim\limits_{h\to+\infty} h[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f\left(a\right)]$ 存在

$(B)\ \lim\limits_{h\to0}\frac{[f(a+2h)-f(a+h)]}{h}$ 存在

$(C)\ \lim\limits_{h\to0}\frac{[f(a+h)-f(a-h)]}{2h}$ 存在

$(D)\ \lim\limits_{h\to0}\frac{[f(a)-f(a-h)]}{h}$ 存在

答案：(D)，A 项只能说明有导数存在，B、C 分子两点函数的差与 $f(x)$ 在 x_0 处的值无关，可能出现极限存在而 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，必不可导的情况.

如：

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0,x\neq0\\1,x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处不连续，必不可导，但极限存在.

题型二：★★★★ 已知某一点可导，用定义证明性质

[例 2.2] 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，请证明：$f'(0)=0$

证明：

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f\left(-x\right)-f\left(0\right)}{-x-0}$$

由偶函数 $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$ 得：$f'\left(0\right)=-f'\left(0\right)$，故 $f'\left(0\right)=0.$

题型三：★★★★★ 求分式的极限

[例 2.3] 求 $\lim\limits_{h\to0}\frac{[f(x+ah)-f(x-bh)]}{h}$

解：

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{[f\left(x+ah\right)-f\left(x-bh\right)]}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{[f\left(x+ah\right)-f\left(x\right)]-[f\left(x-bh\right)-f\left(x\right)]}{h}\\&=a\lim_{h\to0}\frac{[f\left(x+ah\right)-f\left(x\right)]}{ah}+b\lim_{h\to0}\frac{[f\left(x-bh\right)-f\left(x\right)]}{-bh}\\&=(a+b)f'\left(x\right)\end{aligned}$$

拆项法，第三行第二项分母 $-bh$ 应特别注意.

2.1.2 判定可导性

题型一：★★ 已知 $f(x)$ 在 x_0 处可导，讨论 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导性

(1) $f(x_0)>0$，在点 x_0 的 ε 邻域内有 $f(x)>0$（保号性）

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

(2) $f(x_0)<0$，同理可得导数为 $-f'(x_0)$

(3) $f(x_0)=0$，

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|=|f'(x_0)|$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x\quad x_0}=-\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{f(x)}{x\quad x_0}\right|=-|f'(x_0)|$$

当 $f'(x_0)\neq 0$，左右导数异号，不可导，

当 $f'(x_0)=0$，可导.

题型二：★★★★★ $f(x)=(x-a)^k|x-a|$ 类型函数在 $x=a$ 处可导性讨论.

结论：

$k=0$，$f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导

$k=m(m\in N^*)$，$f(x)$ 在 $x=a$ 处 m 阶可导，$m+1$ 阶不可导.

[例 2.4] 求函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数.

解：因式分解得 $f(x)=(x-2)(x+1)|x(x+1)(x-1)|$

利用上述结论：

$x=0,x=1$ 时 $k=0$ 不可导，$x=-1$ 时 $k=1$，一阶可导. 其余零点均为可导零点.

2.1.3 ★★★★★ 可导必定连续

常利用其逆否命题判定不可导，即不连续的函数在不连续点必定不可导，上述题目中已经涉及本知识点.

2.2 求导的基本法则

本节前半部分与高中部分类似，需新掌握

1. 正余割函数，反三角函数的导数（一定要熟练背诵，很常用）

2. 幂指函数及对数求导法

3. 高阶函数求导（常用公式 +Leibniz 公式）

4. 隐函数及参数方程求导

2.2.1 ⋆⋆⋆⋆⋆ 复合函数链式求导

熟练度是最关键的，采取逐层“扒皮”方法.

[例 2.5]$y=\cos^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$

设 $u=\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$，$v=\frac{1-\ln x}{x}$，则 $y=u^2$.

可求得：$v'=-\frac{2-\ln x}{x^2},u'=-v'\cdot\sin v$

因此：$y'=2u\cdot u'=2\frac{2-\ln x}{x^2}\cos\frac{1-\ln x}{x}\sin\frac{1-\ln x}{x}$

2.2.2 ⋆⋆ 反函数求导

公式如下：

$$\begin{cases} x=\varphi(y) \\ y=f(x) \end{cases} \quad f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

或 $y_x{}'=\frac{1}{x_y{}'}$

[例 2.6] 证明 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

证明：令 $y=\arctan x, x=\tan y$

$$x_y{}'=\sec^2 y, y_x{}'=\frac{1}{x_y{}'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

2.2.3 ⋆⋆⋆ 对数求导法

常用于多项乘积或多次方情况

[例 2.7] 求 $y=\sqrt{x\ln x\sqrt{1-\sin x}}$ 中 y 对 x 一阶导数

解：等式两边取对数 $\ln y=\frac{1}{2}[\ln x+\ln(\ln x)+\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)]$，再两边同时对 x 求导即可，计算量比链式求导减少了不少.

2.2.4 ⋆⋆ Leibniz 公式高次求导

（与多项式展开形式很像）

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n{}^1u^{(n-1)}v'+C_n{}^2u^{(n-2)}v''+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}$$

多数应用于乘积中有 x^m，m 为正整数的情况.

[例 2.8] 求 $y=x\ln x$ 的 n 阶导数.

解：由于 x 的二阶及以上导数为 0，利用公式可得 $y^{(n)}=x\ln x^{(n)}+C_n{}^1\ln x^{(n-1)}$，再代入 lnx 的高阶求导结果即可.

2.2.5 ⋆⋆⋆⋆⋆ 隐函数求导

法一：方程两边同时对 x 求导

[例 2.9]$y = \tan(x+y)$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：两边对 x 求导：

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)}(1+y')$$

$$y' = \frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}, \sec^2(x+y) = 1+\tan^2(x+y)$$

$$y' = \frac{1+\tan^2(x+y)}{-\tan^2(x+y)} = \frac{1+y^2}{-y^2} = -\frac{1}{y^2} - 1$$

$$y'' = -\frac{2}{y^3}(\frac{1}{y^2}+1)$$

法二：对数求导法

[例 2.10] 求由 $x^y = y^x$ 确定的隐函数 y 的导数$\frac{dy}{dx}$解：取对数可得：y $\ln x = x \ln y$

$$y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{1}{y}y'x$$
$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

2.2.6 ⋆⋆⋆⋆ 参数方程求导公式如下：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

2.3 微分

可微分与可求导等价，本节主要需要掌握微分的运算法则与近似计算应用，以上节求导的知识和计算为基础.

2.3.1 ⋆⋆⋆⋆⋆ 求函数微分

可以先求导得到$\frac{dy}{dx}$，然后将 dx 乘到等式右边即可.

[例 2.11]

$$y = x \sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin 2x + 2x \cos 2x$$

$$dy = (\sin 2x + 2x \cos 2x)\, dx$$

2.3.2 ⋆⋆ 微分在近似计算中的应用

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

[例 2.12] 求 $ln1.01$ 的近似值解：

取 $f(x) = \ln(x)$，

$$\ln(x) \approx \ln(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

令 $x_0 = 1$, $x = 1.01$

$$\ln(1.01) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(0.01) = 0.01$$

2.3.3 ⋆⋆⋆ 区分 Δy 与 dy

大前提：可微，公式如下：

$$y=f(x),\ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$dy = f'(x)dx$$

[例 2.13] 已知 $y = x^3 - x$，计算在点 $x = 2$ 处当 Δx 分别等于 1, 0.1, 0.01 时的 Δy 与 dy.

解：

$$\Delta y = [(x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)] - (x^3 - x)$$

$$= (3x^2 - 1)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$f'(x) = (3x^2 - 1)$$
$$dy = (3x^2 - 1)dx$$

再将各值代入即可.

2.4 微分中值定理及其应用

本节的主要内容为三个中值定理及洛必达法则的应用，中值定理的应用灵活性，技巧性很强，需要多加练习总结题型和思路，经常作为压轴题考察.洛必达法则不能盲目使用，需要明确前提条件和使用技巧.

2.4.1 ★★★★★ 罗尔定理应用（难度较大）

利用罗尔定理，常常需要构造函数，需要多做题对常见的辅助函数做到“眼熟”现将几个常用的辅助函数列表如下：

表 1　罗尔定理常见辅助函数表

中值等式 $G(\varepsilon)=0$	$F'(x)=0$
$f'(\varepsilon)+A\varepsilon^k+B=0$	$(f(x)+\frac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx)'=0$
$f(a)g'(\varepsilon)-f'(\varepsilon)g(a)-k=0$	$[f(a)g(x)-f(x)g(a)-kx]'=0$
$f(\varepsilon)g''(\varepsilon)-f''(\varepsilon)g'(\varepsilon)$	$[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]'=0$
$(\varepsilon-1)f'(\varepsilon)+kf(\varepsilon)=0$	$[(x-1)^k f(x)]'=0$
$f'(\varepsilon)+\lambda f(\varepsilon)=0$	$[e^{\lambda x}f(x)]'=0$
$f'(\varepsilon)-f(\varepsilon)g'(\varepsilon)=0$	$[e^{g(x)}f(x)]'=0$

请同学们一定不要死记硬背，在做题的过程中如果没有思路可以看一下表，一定要多做题进行总结，欢迎将表格进行扩充.

[例 2.14] 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(b)-f(a)=g(b)-g(a)$，试证明在 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $f'(c)=g'(c)$

证明：构造 $F(x)=f(x)-g(x)$，$F(a)=F(b)$，利用罗尔定理即可得证.

变式：柯西定理证明

设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且当 $x\in(a,b), g'(x)=0$

试证明在 (a,b) 内至少有一点 c，使得$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$证明：构造 $m(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = m(b) - m(a)$$

故，由罗尔定理 $\exists c \in (a,b)$，使得 $f'(c) = m'(c)$

即：

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

2.4.2 ⋆⋆⋆⋆ 拉格朗日定理应用（难度较大）

题型一：证明不等式（求导对其中一个进行有界（一般是 1）分析）

[例 2.15]（基础题）求证：$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

由拉格朗日中值定理可得：$\sin x - \sin y = (x - y)\cos\xi$

故：$|\sin x - \sin y| \leq |\cos\xi|\,|x - y|$

又 $|\cos\xi| \leq 1$

故有 $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

[例 2.16]（略难）设 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上具有单调减小的导函数 $f'(x)$，且 $f(0) = 0$，求证：

对于满足不等式 $0 < a < b < a + b$ 的 a, b，$f(a+b) < f(a) + f(b)$

证明：两次应用拉格朗日中值定理：

$$f(a) - f(0) = f'(\xi_1)(a - 0), \xi_1 \in (0, a)$$

$$f(a+b) - f(b) = f'(\xi_2)(a + b - b), \xi_2 \in (b, a + b)$$

两式相减可得：$f(a+b) - f(b) - f(a) = a[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]$

又 $\xi_2 > \xi_1$，导函数单调减小

有：$[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] < 0$

$f(a + b) < f(a) + f(b)$ 得证.

2.4.3 ⋆⋆ 柯西定理（相较前两个定理，考察较少）

[例 2.17] 设 $0 \leq a < b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试证在 (a,b) 内存在

三点 x_1, x_2, x_3，使得 $f'(x_1) = (b + a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ab + a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$

分析：观察第二、三式分母，可以看出他们分别是 x_2^2、x_3^3 求导后的结果，因此，第一式分母可以看成是 x_1 求导后的结果. 化简后就成了一道比较简单的 *Cauchy* 定理的题目.

证明：由分析可得：

$$f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{f'(x_2)}{2x_2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$$

$$\frac{f'(x_3)}{3{x_3}^2}=\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}$$

联立三式，原式得证.

2.4.4 ⋆⋆⋆⋆⋆ 洛必达法则

应用条件：$f(x),g(x)$ 在区间 $(x_0,x_0+\delta),(\delta>0)$ 满足：（第一条最关键，不是 0 或无穷则不能用）

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=0$ 或 ∞

(2)f,g 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=a$，（$a$ 为有限实数或无穷大）.

[例 2.18]

正例：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}=\infty$$

错例：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}}=1$$

数列不能直接用洛必达法则，需要先将 n 化为 x 的函数求极限，再利用海涅定理得到数列同样为此极限.

2.5 Taylor 定理及其应用

本节介绍了带两种余项的泰勒公式，并给出了常用函数的麦克劳林展开式（一定要牢记，很常用，在以后的级数学习中也会有类似形式），需要同学们根据不同的题灵活选用不同形式的余项.

2.5.1 ⋆⋆⋆⋆⋆ 带皮亚诺余项的泰勒公式应用

题型一：常用于求极限

[例 2.19] 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

解：提公因式 x，得到麦克劳林展式中常用的 $(1+x)^\alpha$ 形式.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$$

$$=\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-{}_2\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}})$$

$$=\lim_{x\to\infty}x((1+\frac{1}{6x}+o_1(\frac{1}{x}))-(1-\frac{1}{6x}+o_2(\frac{1}{x})))$$

$$=\frac{1}{3}$$

题型二：等价无穷小应用

[例 2.20] 见 [例 1.14(2)]

2.5.2 ⋆⋆⋆⋆⋆ 带拉格朗日余项的泰勒公式应用

[例 2.21] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

证明：本题采用在 a,b 分别展开，再进行联立的技巧

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2\xi_1\in(a,x)$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2\xi_2\in(x,b)$$

将 $x=\frac{a+b}{2}$ 代入

$$\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{a+b}{2})=f(a)+f'(a)\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2,\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})\\ f(\frac{a+b}{2})=f(b)+f'(b)\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2,\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)\end{cases}$$

两式相减可得：

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

$$\Rightarrow\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|=\left|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\right|\leq\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}\right|+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}\right|\leq\max(f''(\xi_1),f''(\xi_2))$$

证毕.

2.6 函数性态的研究

本节主要内容有单调性，极值，最值，凹凸性和拐点，整体难度不大，根据定义判断即可，但根据是否连续和是否可导判断极值是一个难点.

2.6.1 判断单调性

利用高中知识求导判断即可

2.6.2 ⋆⋆⋆ 极值点的讨论

在 x_0 处：

1) 连续

a) 可导，且 $f'(x_0)=0$

导数在左右变号，取极值.

导数在左右不变号，不取极值.

b) 不可导

导数在左右变号，取极值.

导数在左右不变号，不取极值.

2) 不连续

利用定义：$f: I \to R, x_0 \in R$, 若 $\exists\delta > 0$, 使得 $\forall x \in U(x_0,\delta) \subseteq I$，恒有 $f(x) \geq f(x_0)$（或 $\leq$），则 f 在 x_0 处取极小（大）值.

[例 2.22] 求由方程 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 所确定的函数在 $x > 0$ 且 $x \neq y^2$ 的极值点.

分析：属于隐函数求极值，需要对两边同时求导.

解：方程两边同时求导可得：

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3y - 3x\frac{dy}{dx} = 0 \to \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$，得到 $y = x^2$.

代入原方程得到：$x^6 - 2x^3 = 0$

因此，驻点为 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$，又有 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=\sqrt[3]{2}} < 0$

故函数的极大值点为 $\sqrt[3]{2}$.

2.6.3 ★★★ 凹凸性应用

性质：凸函数$\frac{f(a)+f(b)}{2} < f(\frac{a+b}{2})$，凹函数符号相反

[例 2.23] 试证$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$

令$f(u) = u\ln u$，$f''(u) = \frac{1}{u} > 0$，为凹函数.

故有：$\frac{f(x)+f(y)}{2} > f(\frac{x+y}{2})$，证完。

三、各章习题举例

3.1 第一章习题

3.1.1 选择题

1. 设 $f(1-\cos x)=\sin^2 x$，$f(x)=$

$A. x^2+2x$

$B. x^2-2x$

$C. -x^2+2x$

$D. -x^2-2x$

2. 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 为

$A.$ 奇函数

$B.$ 偶函数

$C.$ 非奇非偶函数

$D.$ 既是奇函数又是偶函数

3. 下列函数是有界函数的是

$A. x^{-\frac{1}{2}}$

$B. e^{-x^2}$

$C. \frac{\cos x}{x}$

$D. x\sin x$

4. $f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$ 为

$A.$ 奇函数

$B.$ 偶函数

$C.$ 非奇非偶函数

$D.$ 周期函数

5. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，则 a,b 的值分别为

$A. -7,5$

$B. 5,-7$

$C. -7,6$

$D. 6,-7$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2-1}}=$

$A.1$

$B.-1$

$C.-\infty$

$D.0$

7. 下列说法正确的是

$A.$ 若 $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}x_n$=$A$，且 $x_n>0$，则必有 $A>0$

$B.$ 当 $x\to0$ 时，$f(x)=e^{1/x}$ 的左右极限均存在

$C.f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 有两条水平渐近线

$D.\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$

$E.$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$，则必有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

8. 设 $x\to0$ 时，$\frac{e^{x\cos^2x^2}-e^x}{x^n}$ 为一非零常数，则 n 为

$A.5$

$B.3$

$C.2$

$D.4$

9. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}(\frac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，则 $x=k\pi(k\in\{0,\pm1...\})$ 为 $f(x)$ 的

$A.$ 第二类间断点

$B.$ 无穷间断点

$C.$ 跳跃间断点

$D.$ 可去间断点

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\sqrt{n^2+n}\pi)$=

$A.1$

$B.$ 不存在

$C.0$

$D.\infty$

11. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+f(x)}{x^3}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+f(x)}{x^3}$ 为

$A.1$

$B.2$

$C.11/6$

$D.13/6$

3.1.2 填空题

1. 画出 $y=arcsin(sinx)$ 与 $y=arccos(cosx)$ 的图像

2. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(arctan(2x))$ 的定义域为

3. 设 $\alpha>0,\beta\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2]=\beta$，则 $(\alpha,\beta)=$

4. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(2x)}=2$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(4x)}{x}=$

5. 已知 $\frac{f(x)}{x^2}=2$，$f(x)$ 二阶可导，求 $f(0)=,f'(0)=,f''(0)=$

6. 设以下函数在 $x=0$ 处可导，则 a,b,c 的值为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2},x>0\\ a,x=0\\ \frac{\sin bx}{x}+cx,x<0\end{cases}$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=$

8. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+\frac{f(x)}{\sin x}]}{a^x-1}=A$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$

9. 设 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$，其中 $x\neq 0,x\neq 1$，则 $f(x)=$

3.1.3 计算题

求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}$，（$a,b,c$ 1.为非负常数）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$

求 $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+x^{\frac{1}{3}}}$

3.1.4 证明题

1. 设 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\sqrt{x_nx_{n+1}}(n=1,2,...)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值

2. 设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,...)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求极限

3. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,...)$

1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值

2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n{}^2}}$

3.2 第二章习题

1.$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$,，求 $f'(0)$

2. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数为

3. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，周期为 4，又有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为

4.$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$，则 $f'(t)=$

5. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$，式中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f'(x)$

6. 确定常数 a,b 的值，使以下函数在 $x=0$ 处可导，并求出此时的 $f'(x)$

$$f(x)=\begin{cases}1+\ln(1-2x),x\leq 0\\ a+be^x,x>0\end{cases}$$

7. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n>3)$

8. 方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}(x>0,y>0)$ 确定函数 $y=f(x)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

9. 设函数 $y=y(x)$ 由以下参数方程确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$$

10. 设 $y=f(\ln(x))e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(1)=0$，求证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0,f(1/2)=1$，证明：

(1) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$

(2) 对任意实数 λ，必定存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

13.$(0,1)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点，则 a,b,c 应满足什么条件

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\leq a,|f''(x)|\leq b$，其中 a,b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点，证明：$|f'(c)|\leq 2a+\frac{b}{2}$

15. 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线条数为

16. 设 $0 \le a < b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，证明在 (a,b) 内必有 ξ 和 η，使得 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} \cdot f'(\eta)$

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 1$，证明：存在 $\xi, \eta \in (a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$，证明：在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'''(\xi) = 3$

四、答案及难题详解

4.1 第一章

4.1.1 选择题

$1 \sim 5 : CABBC \quad 6 \sim 10 : BCAAA \quad 11 \sim 13 : DCB$

4.1.2 填空题

1. 略.

2. $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$.

3. $(2, \frac{1}{2})$.

4. 1.

5. 0,0,4.

6. 1,1,0.

7. e^4.

8. $Alna$

9. $x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1$

4.1.3 计算题

1.

$$\max\{a,b,c\}^n \le a^n + b^n + c^n \le 3\max\{a,b,c\}^n$$

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$$

故有：

$$\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a,b,c\}$$

2. 原极限可化简为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\int_0^1 x^2=\frac{1}{3}$$

3.

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}{(2+x^{\frac{1}{3}})(\sqrt{1-x}+3)(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}$$

$$=-\lim_{x\to-8}\frac{(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}{(\sqrt{1-x}+3)}=-2$$

4.1.4 证明题

1. 证明：令 $y_n=lnx_n$，由于 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\sqrt{x_nx_{n+1}}$

$\to x_n>0$，且 $y_{n+2}=\frac{y_n+y_{n+1}}{2}$

$\to y_{n+2}-y_{n+1}=-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_n)=...=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2$

根据累加法并结合等比数列求和公式可得：

$$y_{n+2}-y_1=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\ln 2$$

$$\lim y_n=\frac{2}{3}\ln 2\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{4}$$

2. 证明：1) 先证明存在性：

当 $0<x<3$ 时，$0<f(x)=\sqrt{x(3-x)}<\frac{1}{2}(x+3-x)=\frac{3}{2}$

故 $\{x_n\}$ 有界

又 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{(3-x_n)}-\sqrt{x_n})$

结合 $0<x_n<\frac{3}{2}$，得 $x_{n+1}-x_n>0$

根据单调有界准则，该数列单调增有上界，故极限存在.

2) 求极限：

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=\sqrt{a(3-a)}$. 可得 $a=frac32$ 或 $a=0$（舍去）.

综上：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

3. 证明：

1) 证：由于 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=sinx_n$，参照上题或用数学归纳法，不难证明数列单调有界，因此数列收敛，再用同样的套路可得极限为 0.

2) 由于 $n\to0$ 等价于 $x_n\to0$，所以：

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n{}^2}}=\lim_{x\to\infty}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

4.2 第二章

1. 直接套公式求导较为困难，考虑用定义求解：

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to0}(h+1)(h+2)(h+3)\cdots(h+n)=n!$$

2. 法一：将函数变为分段函数去绝对值，讨论每个分段点的左右导数是否相等.

法二：由于 $f(x)=(x-2)(x+1)\cdot|x|\cdot|x+1|\cdot|x-1|$ 含有因子 $(x+1)|x+1|$，故分界点处可导点为 $x=-1$，不可导点为 $x=0$ 和 $x=1$，在这两个点会出现尖点型不可导.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}f'(1)=-1$

$f'(1)=-2$，由周期性可知 $f'(5)=-2$.

4. $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}=t[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}]^{2t}=te^{2t}$，$f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}$.

5. 要求其导数得先求得表达式，故令 $x=1/x$，解方程组：

$$\begin{cases}af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}\\ af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\frac{ac}{x}-bcx}{a^2-b^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(-\frac{ac}{x^2}-bc)=-\frac{bcx^2+ac}{x^2(a^2-b^2)}$$

6. 因要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且左导数要等于右导数，即 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=1$，得 $a+b=1$.

又由于左导数要等于右导数

$$\begin{cases}f_-{}'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{[1+\ln(1-2x)]-1}{x}=-2\\ f_+{}'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(a+be^x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{b(e^x-1)}{x}=b\end{cases}$$

故 $b=-2,a=3$. 此时 $f(x)$ 在定义域内可导.

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{2}{1-2x},x\le0\\ -2e^x,x>0\end{cases}$$

总结：对于确定参数的值使分段函数可导的问题，通常利用在分段点处左导数等于右导数且都存在，二要利用在分段点处左极限等于右极限且等于该点函数值，抓住这两点来求解参数确定函数的值.

7. 法一：利用牛顿莱布尼兹公式

$$(uv)_{(n)} = u_{(n)}v_{(0)} + C_{n}1u_{(n-1)}v' + C_{n}2u_{(n-2)}v'' + \cdots + u_{(0)}v_{(n)}$$

又$[ln\,(1+x)]^k = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$（$k$为整数）可求得：

$$f^{(n)}(x) = x^2\frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{n}-1)!}{(1+x)^{\mathrm{n}}}+2nx\frac{(-1)^{\mathrm{n}-2}(\mathrm{n}-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{\mathrm{n}-3}(\mathrm{n}-3)!}{(1+x)^{n-2}}$$

所以有：

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1}n}{n\quad 2}$$

法二：将 $ln(x+1)$ 用麦克劳林展开式展开，然后逐个求导，发现前面大部分的项都是 0，只留下了最后几项.

再对 x 求导，可得：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y(\ln y+1)^2 - x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$$

9.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}} = (t+1)(3t+2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(6t+5)(t+1)}{t}$$

10.

$$y' = f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot e^{f(x)} + f(\ln x)e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$dy = y'dx = e^{f(x)}[\frac{1}{x}f'(\ln x) + f'(x)f(\ln x)]dx$$

11. 解：显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理（闭区间连续，开区间可导），但却不是拉格朗日中值定理的形式，故考虑用罗尔定理，即找原函数，先将等式变形.

$$\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$$

找其原函数 $F(x) = x^2f(x)$，故只需要将两端点代入，发现 $F(0) = 0F(1) = 0$，故依据罗尔定理可知存在一点等式成立.

12. 证明：

1) 令 $\Phi(x) = f(x) - x$，则 $\Phi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又$\Phi(1) = -1 < 0, \Phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$，由闭区间上的介值定理可知，存在$\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$，使得 $\Phi(\eta) = f(\eta) - \eta = 0 \Rightarrow f(\eta) = \eta$.

2) 设 $F(x) = e^{-\lambda x}\Phi(x) = e^{-\lambda x}[f(x)-x], F(0) = 0, F(\eta) = 0$ 又 $F(X)$ 在区间范围内连续可导，故由罗尔定理可知原式得证.

13. 因为 $y''|_{x=0}=0$，而 $y''=6ax+2b$，故 $b=0$.

为保证 y'' 在 $x=0$ 左右两侧符号变化，故 $a\neq 0$，故有 $a\neq 0,b=0,c=1$.

14.

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)(x-c)^2}{2!}$$

分别令 $x=0,x=1$ 可得：

$$\begin{cases} f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)(0-c)^2}{2!},0<\xi_1<c<1 \\ f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)(1-c)^2}{2!},0<c<\xi_2<1 \end{cases}$$

以上两式作差可得：

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]$$

$$|f'(c)|=\left|f(1)-f(0)-\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]\right|$$

61

$$|f'(c)|\le|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c^2)+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2\le a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]$$

又因为 $c\in(0,1),(1-c)^2+c^2\le 1$，故有$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$.

15. 先分析间断点只有 $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$，故 $x=0$ 为垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=0+\ln 1=0$，故有水平渐近线 $y=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-\ln e^x]=0$$

故在 $x\to+\infty$ 时有斜渐近线 $y=x$.

故总共有 3 条渐近线.

16. 证明：首先，由拉格朗日中值定理，必有 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，问题转化为须证：存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}\cdot f'(\eta)$

整理上式：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\eta-\frac{a+b}{2}f'(\eta)=0$$

令 $F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2}-\frac{a+b}{2}f(x)$，再根据罗尔定理，即可得证.

17. 证明：令 $F(x)=e^xf(x)$，则 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，存在 $\eta\in(a,b)$，使得$\frac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]$

由已知条件 $f(a)=f(b)=1$，有以下等式：

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]$$

再令 $\varphi(x)=e^x$，再利用一次拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\xi$综上，得证.

18. 证明：在解决高阶导数的函数值问题时，一般用泰勒展开解题：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$$

$\eta\in(0,x)$，分别令 $x=-1,x=1$，并结合已知条件可得：

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),-1<\eta_1<0$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),0<\eta_2<1$$

两式相减可得：

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$$

由于存在三阶连续导数，故 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值，设为 M 和 m，则有：

$$m\le\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\le M$$

再由连续函数的介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]$，使得

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3$$

证毕.